Esercizio :

Sia Φ un sistema di radici, e siano α , $\beta \in \Phi$ tali che $\alpha + \beta \in \Phi$. Allora l'insieme $\Phi_{\alpha\beta} = \{a\alpha + b\beta \in \Phi \mid (a,b \in Z\}$ è un sistema di radici di tipo A_2 , B_2 , o G_2 nello spazio 2-dimensionale generato da α e β (Traccia: si osservi che $\Phi_{\alpha\beta}$ contiene due radici indipendenti fra loro non-ortogonali , e dunque è irriducibile .)

10 . Costruzione dei sistemi di radici irriducibili

In questo paragrafo proviamo che *ogni (possibile) diagramma di Dynkin connesso che appare nella Tabella 2 , effettivamente "esiste in natura"*, esibendo esplicitamente il corrispondente sistema di radici .

Per ragioni di uniformità , e per abbreviare le verifiche , adottiamo la procedura seguente (cfr. Bourbaki, "Groupes et algèbres de Lie", Chap.VI) :

Consideriamo uno spazio euclideo $\mathbf{R^n}$, con l'usuale prodotto scalare , rispetto al quale $(e_1 , . . . , e_n)$ sia una base ortonormale , e scegliamo come spazio E lo stesso spazio $\mathbf{R^n}$, o un suo opportuno sottospazio munito del prodotto scalare ereditato da $\mathbf{R^n}$. Scegliamo in E un opportuno sottogruppo discreto I (in altri termini , I è formato da punti isolati nella topologia usuale di $\mathbf{R^n}$) , e definiamo Φ come l'insieme di tutti i vettori di I aventi lunghezze in un insieme finito $\Lambda \subset \mathbf{R}^+$, con Λ scelto in modo tale che , per ogni α , $\beta \in \Phi$, risulti $< \beta , \alpha > \in Z$. Poichè Φ è limitato , per il Teorema di Bolzano-Weierstrass è certamente finito . Inoltre , $0 \notin \Phi$. Perchè Φ sia un sistema di radici , basterà allora che Φ generi E , e che l'opportuna scelta delle lunghezze assicuri la validità dell'assioma ii) . L'assioma iii) è infatti automaticamente soddisfatto , poichè per ogni α , $\beta \in \Phi$, $r_\alpha(\beta) = \beta - < \beta , \alpha > \alpha$ appartiene a I , e dunque a Φ , dal momento che le riflessioni preservano le lunghezze .

In ciascuno dei casi da **A** a **E** , esibiremo un sistema fondamentale Π , che rende manifesta , mediante il suo diagramma di Dynkin , l'appartenenza di Φ al tipo richiesto .

Daremo inoltre la cardinalità di Φ , e alcune informazioni sul gruppo di Weyl .

A_n $(n \geq 1)$:

Scegliamo come spazio E l'iperpiano di R^{n+1} ortogonale al vettore $\Sigma\, e_i$. Denotiamo con $Z\{e_i\}$ il **reticolo intero** generato dalla base ortonormale (e_i), i.e. lo Z-sottomodulo di R^{n+1} generato da (e_i), e poniamo $I = E \cap Z\{e_i\}$, $\Lambda = \{\sqrt{2}\}$. Allora $\Phi = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n+1\}$ è un sistema di radici che ammette come sistema fondamentale l'insieme $\Pi = \{e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n\}$. Infatti Π è una base di E, e $e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \ldots + (e_{j-1} - e_j)$ per ogni $i < j$. Il corrispondente diagramma di Dynkin è chiaramente di tipo A_n, e Card $\Phi = n(n+1)$.
Osserviamo infine che la riflessione di centro $< e_i - e_j >$ permuta e_i con e_j, e fissa gli altri vettori della base (e_i), i.e. opera sugli indici della base (e_i) come la trasposizione $(i\ ,\ j)$. Poichè le trasposizioni generano il gruppo simmetrico S_{n+1}, resta così stabilito un isomorfismo naturale fra il gruppo di Weyl $W(\Phi)$ e S_{n+1}.

B_n $(n \geq 2)$:

Poniamo $E = R^n$, $I = Z\{e_i\}$, $\Lambda = \{1, \sqrt{2}\}$. Allora $\Phi = \{\pm e_i\ ,\ \pm(e_i \pm e_j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ è un sistema di radici che ammette come sistema fondamentale l'insieme $\Pi = \{e_1 - e_2\ , \ldots , e_{n-1} - e_n\ , e_n\}$ (verificarlo!). Il corrispondente diagramma di Dynkin è chiaramente di tipo B_n, e Card $\Phi = 2n + 2n(n-1) = 2n^2$.
Osserviamo che l'effetto sulla base (e_i) delle riflessioni di centro $< e_i >$ è quello di cambiare segno a e_i lasciando invariati gli e_j con $i \neq j$. Queste riflessioni generano un gruppo abeliano elementare A di ordine 2^n. Le riflessioni di centro $< e_i - e_j >$ permutano e_i con e_j e fissano gli altri vettori della base (e_i), e dunque generano un gruppo S isomorfo al gruppo simmetrico S_n. Il gruppo di Weyl $W = W(\Phi)$ è generato dai sottogruppi A e S, e A è un sottogruppo normale di W (si ha infatti $r_{e_i-e_j}\, r_{e_i}\, r_{e_i-e_j} = r_{e_j}$). Si conclude che W è il gruppo di tutte le permutazioni e dei cambiamenti di segno dell'insieme $\{e_i\}$, isomorfo al prodotto semidiretto del gruppo abeliano elementare $(Z/2Z)^n$ per il gruppo simmetrico S_n (e in particolare $|W| = 2^n\,(n!)$).

C_n $(n \geq 3)$:

Per costruire un sistema di tipo C_n $(n \geq 2)$ basta (cfr. 9. , Proposizione 1) considerare il sistema di radici duale di B_n (avendosi allora $B_2 = C_2$). Si ha dunque, nello spazio $E = R^n$, $\Phi = \{\pm 2e_i\ ,\ \pm(e_i \pm e_j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$, e $\Pi = \{e_1 - e_2\ , \ldots , e_{n-1} - e_n\ , 2e_n\}$. Naturalmente il gruppo di Weyl di C_n ha la stessa struttura di quello di B_n. (Ma per $n \geq 3$, C_n non è evidentemente isomorfo a B_n, poichè ha diversa matrice di Cartan .)

D_n $(n \geq 4)$:

Poniamo $E = \mathbf{R}^n$, $I = Z\{e_i\}$, $\Lambda = \{\sqrt{2}\}$. Allora $\Phi = \{\pm(e_i \pm e_j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ è un sistema di radici che ammette come sistema fondamentale l'insieme $\Pi = \{e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n\}$ (verificarlo!) . Il corrispondente diagramma di Dynkin è chiaramente di tipo $\mathbf{D_n}$, e Card $\Phi = 2n(n-1)$.
Le riflessioni di centro $< e_i - e_j >$ generano un sottogruppo S di W isomorfo al gruppo simmetrico S_n . Il prodotto della riflessione di centro $< e_i - e_j >$ per la riflessione di centro $< e_i + e_j >$ manda e_i ed e_j nei loro opposti , e fissa e_k per ogni $k \neq i, j$. Dunque questi elementi di W generano il sottogruppo P dei cambiamenti di segno di un numero pari di vettori della base (e_i) : P è un gruppo abeliano elementare generato dai cambiamenti di segno delle coppie $\{e_i, e_{i+1}\}$, e dunque è isomorfo a $(Z/2Z)^{n-1}$. Poichè W è generato da S e da P, e P è normale in W , si conclude che W è isomorfo al prodotto semidiretto di $(Z/2Z)^{n-1}$ per il gruppo simmetrico S_n (e in particolare $|W| = 2^{n-1}(n!)$) .

G_2 :

Scegliamo come spazio E il piano di $\mathbf{R}^3$ ortogonale al vettore $e_1 + e_2 + e_3$, e poniamo $I = E \cap Z\{e_i\}$, $\Lambda = \{\sqrt{2}, \sqrt{6}\}$. Allora $\Phi = \pm\{e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_2 - e_3, 2e_1 - e_2 - e_3, 2e_2 - e_1 - e_3, 2e_3 - e_1 - e_2\}$ è un sistema di radici che ammette come sistema fondamentale l'insieme $\Pi = \{\alpha = e_1 - e_2, \beta = -2e_1 + e_2 + e_3\}$ (verificarlo!) . Il corrispondente diagramma di Dynkin è di tipo $\mathbf{G_2}$, e Card $\Phi = 12$.
Poichè l'angolo fra α e β è $(5/6)\pi$, la rotazione $r_\alpha \cdot r_\beta$ ha ordine 6 . Dunque $W = < r_\alpha, r_\beta >$ è un gruppo diedrale di ordine 12 .

F_4 :

Poniamo $E = \mathbf{R}^4$, $I = Z\{e_i\} + Z\{(\Sigma e_i)/2\}$, $\Lambda = \{1, \sqrt{2}\}$. Allora $\Phi = \{\pm e_i, \pm(e_i \pm e_j), \pm(\Sigma \pm e_i)/2 \mid 1 \leq i \neq j \leq 4\}$ (ove , in $(\Sigma \pm e_i)/2$, i segni possono essere scelti indipendentemente l'uno dall'altro) è un sistema di radici che ammette come sistema fondamentale l'insieme $\Pi = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4, (1/2)(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)\}$ (verificarlo!) . Inoltre, Card $\Phi = 48$.
Si può provare che il gruppo di Weyl W ha struttura $[[(Z/2Z)^3] S_4] S_3$, e in particolare dunque è un gruppo risolubile di ordine 1152 .

Per quanto riguarda i sistemi di tipo E , conviene partire dalla costruzione di $\mathbf{E_8}$, e costruire poi $\mathbf{E_7}$ e $\mathbf{E_6}$ come sotto-sistemi di $\mathbf{E_8}$. Premettiamo a questo scopo il seguente facile lemma :

Lemma. *Siano Φ un sistema di radici in uno spazio euclideo E , Π un sistema fondamentale contenuto in Φ, Π' un sottoinsieme di Π, e $U = < \Pi' >$ il sottospazio di E generato da Π'. Allora $\Phi' = \Phi \cap U$ è un sistema di radici in U, con sistema fondamentale Π' .*

Dim. Gli assiomi i), ii), iv) sono ovviamente soddisfatti . D'altra parte Φ' è formato da tutte e sole le radici di Φ che sono combinazione lineare di Π' , e dunque segue subito che le riflessioni $r_{\alpha|U}$ $(\alpha \in \Phi')$ preservano Φ' e che Π' è un sistema fondamentale per Φ' .

Definizione. *Nelle ipotesi del Lemma , diremo che Φ' è il* **sotto-sistema** *di Φ generato da Π' .*

(In particolare , ciò che precede prova che , se Δ' è il diagramma di Dynkin di un sistema di radici Φ', ed è incluso nel diagramma di Dynkin Δ di un sistema di radici Φ , allora Φ' è un sotto-sistema di Φ .)

E_8 :

Poniamo $E = \mathbf{R}^8$, $L = \mathbf{Z}\{e_i\} + \mathbf{Z}\{(\Sigma\, e_i)/2\}$, e scegliamo come sottogruppo I l'insieme dei vettori $\Sigma\, z_i e_i + z\{(\Sigma\, e_i)/2\} \in L$ tali che $\Sigma\, z_i + z$ sia un intero *pari* (questo insieme è un sottogruppo) . Posto $\Lambda = \{\sqrt{2}\}$, si verifica senza troppa difficoltà che Φ consiste dei vettori $\pm(e_i \pm e_j)$, $1 \leq i \neq j \leq 8$, e dei vettori $(\Sigma\, (-1)^{\nu(i)} e_i)/2$ con $\Sigma\, \nu(i)$ pari . Si può vedere direttamente che per ogni $\alpha , \beta \in \Phi$, risulta $(\beta,\alpha) \in \mathbf{Z}$, e quindi anche $< \beta , \alpha > \in \mathbf{Z}$. Infine l'insieme $\Pi = \{(1/2)(e_1 + e_8 - (e_2 + \ldots + e_7)),\ e_1 + e_2 ,\ e_2 - e_1 ,\ e_3 - e_2 ,\ e_4 - e_3 ,\ e_5 - e_4 ,\ e_6 - e_5 ,\ e_7 - e_6\}$ è un sistema fondamentale per Φ , che ha come diagramma di Dynkin , rispetto all'ordinamento scelto per Π , proprio il diagramma E_8 della Tabella 2 .
E' Card $\Phi = 4(8{\cdot}7/2) + 2^7 = 240$, e si può provare che il gruppo di Weyl $W(E_8)$ ha ordine $2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$.

E_7 :

Consideriamo il sotto-sistema Φ' di E_8 generato da $\Pi' = \Pi - \{e_7 - e_6\}$. Φ' è un sistema di tipo E_7 , che vive nell'iperpiano di $\mathbf{R}^8$ ortogonale al vettore $e_7 + e_8$, e consiste dei vettori $\pm(e_i \pm e_j)$, $1 \leq i \neq j \leq 6$, dei due vettori $\pm(e_7 - e_8)$, e dei vettori $\pm(1/2)(e_7 - e_8 + \sum_1^6 (-1)^{\nu(i)} e_i)$, con $\sum_1^6 \nu(i)$ dispari .
E' Card $\Phi' = 4(6{\cdot}5/2) + 2 + 2^6 = 126$, e si può provare che il gruppo di Weyl $W(E_7)$ ha ordine $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

E_6 :

Consideriamo il sotto-sistema Φ'' di E_8 generato da $\Pi'' = \Pi - \{e_6 - e_5 , e_7 - e_6\}$. Φ'' è un sistema di tipo E_6 , che vive nel sottospazio 6-dimensionale di $\mathbf{R}^8$, ortogonale al piano generato dai vettori $e_7 + e_8$ e $e_6 + e_7 + 2e_8$, e

consiste dei vettori $\pm(e_i \pm e_j)$, $1 \leq i \neq j \leq 5$, e dei vettori $\pm(1/2)(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_1^5 (-1)^{\nu(i)} e_i)$, con $\sum_1^5 \nu(i)$ pari .

E' Card $\Phi'' = 4(5{\cdot}4/2) + 2^5 = 72$, e si può provare che il gruppo di Weyl $W(E_6)$ ha ordine $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$.